Aufgabe 14 (TR) ++ Drehrad mit gekoppelten Massen

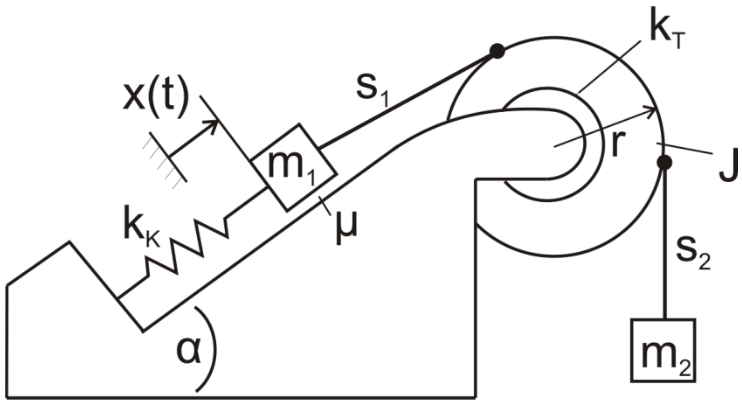


Abbildung 4

a) Die Koordinate $x(t)$ kann die Bewegung aller Körper des Gesamtsystems hinreichend beschreiben. Das System hat den Freiheitsgrad $f = 1$.

b) Lagrangefunktion:

$$L = T^* - U$$

$$T^* = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J (\frac{\dot{x}}{r})^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_K x^2 + \frac{1}{2} k_T (\frac{x}{r})^2 + m_1 g x \sin\alpha - m_2 g x$$

c) Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{x}} - \frac{\delta L}{\delta x} = -f_d$$

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{x} - \left(-(k_K + \frac{k_T}{r^2})x - m_1 g \sin\alpha + m_2 g\right) = -\mu m_1 g \cos\alpha$$

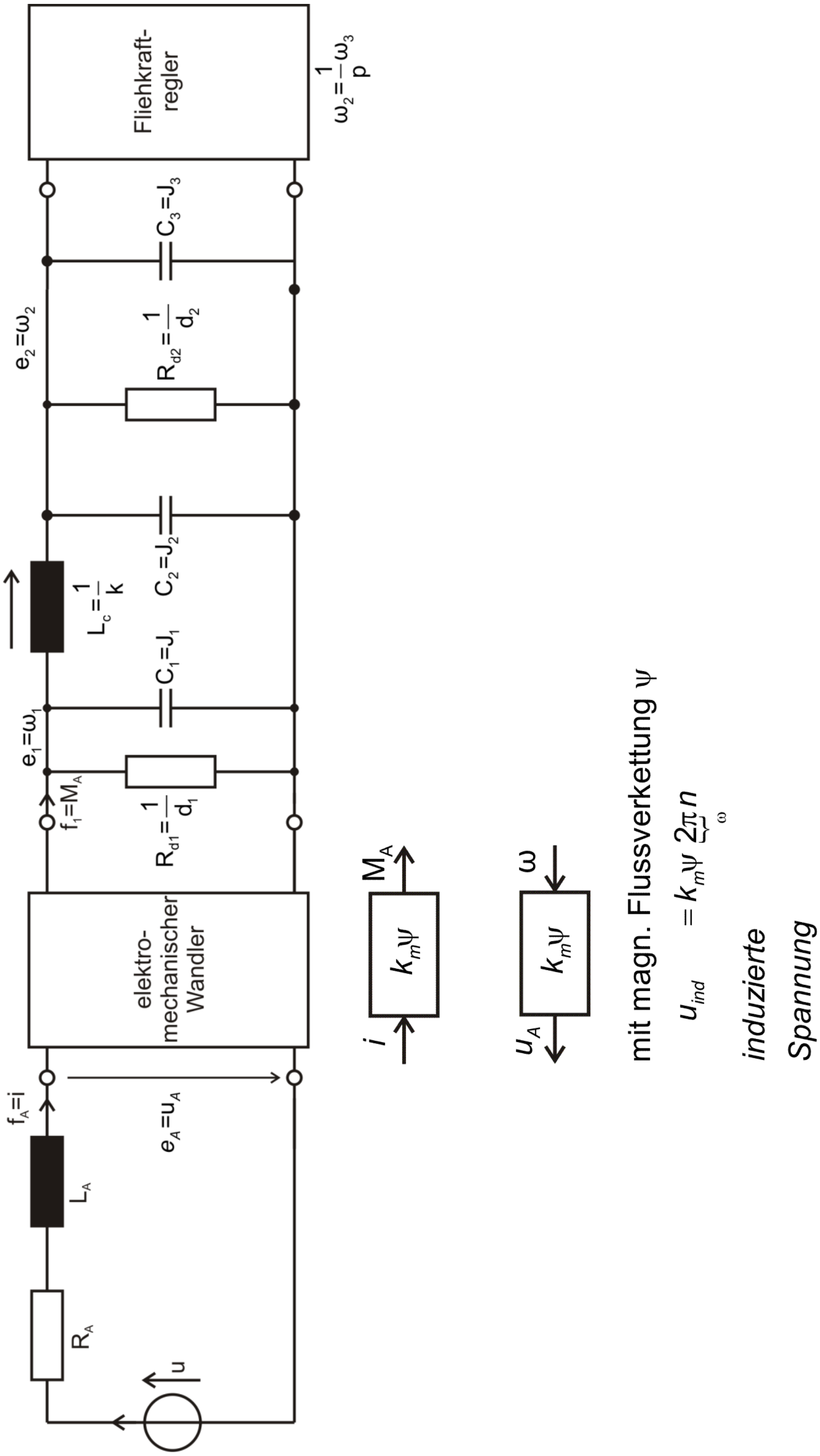
mit der Reibkraft $F_R = \mu m_1 g \cos\alpha$

Differentialgleichung des Systems:

$$\ddot{x} + \frac{(k_K + \frac{k_T}{r^2})}{\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}\right)} x = \frac{-m_1 g \sin\alpha + m_2 g + \mu m_1 g \cos\alpha}{\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}\right)}$$

Aufgabe 17 (TR) ++++ Gleichstrommaschine mit Fliehkraftregler

a)



$u = R \cdot i_A$

$u_L = L \dfrac{di_A}{dt}$

$M_A = k_T \cdot i_A$

$M_{d1} = d_1 \cdot \omega_1$

$M_{C1} = J_1 \cdot \dot{\omega}_1$

$M_C = k \cdot \Delta\varphi$ mit $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ und $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$M_{C2} = J_2 \cdot \dot{\omega}_2$

$M_{d2} = d_2 \cdot \omega_2$

$M_{C3} = J_3 \cdot \dot{\omega}_2$

$\dfrac{\omega_2}{\omega_3} = \dfrac{1}{p}$

b)

Generalisierte Auslenkung	Generalisierte Spannung
q_c	$e = \dot{q}_c$
x	$v = \dot{x}$
φ	$\omega = \dot{\varphi}$
ψ	$u = \dot{\psi}$

Generalisierter Impuls	Generalisierter Fluss
q_f	$f = \dot{q}_f$
p (Impuls)	$F = \dot{p}$
L (Drall)	$M = \dot{L}$
q (Ladung)	$i = \dot{q}$

$L_{elekt} = \dfrac{1}{2} L_{Sp} i^2 = \dfrac{1}{2} L_{Sp} \dot{q}^2$ mit Induktivität $L_{Sp} = L_A$

Generalisierte Koordinaten:

$\dot{q} = i = \dot{q}_{f0}$

$q = q_{f0}$

Ableitungen für q_{f0} ermitteln:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{f0}} = L_{Sp}\dot{q} = L_{Sp} i$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{f0}} = L_{Sp}\ddot{q} = L_{Sp}\dot{i}$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_{f0}} = 0$$

Für $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{fi}} - \frac{\partial L}{\partial q_{fi}} = f_0 - f_d$ ergibt sich:

$L_{Sp}\dot{i}(t) = u(t) - Ri(t) - u_{EMK}(t)$

mit $u_{EMK}(t) = k_m \omega_1(t) = c_M \psi_F \omega_1(t)$ und $M_A(t) = k_T i(t)$

Dreht sich der Anker bei konstantem magnetischem Hauptfluss, so ist die induzierte Spannung $u_A(t)$ proportional zur Ankerdrehzahl.

$u_A(t) = c_M \psi_F \omega_1 = k_M \omega_1$

$\psi_F = L_F i_F$

$c_M =$ Maschinenkonstante

c)

$$L_{mech} = L_{mech1} + L_{mech2} =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left[J_1\cdot\omega_1^2 + \left(J_2 + J_3\right)\cdot\omega_2^2 - k\cdot\Delta\varphi^2\right] - 2\cdot m\cdot g\cdot l\cdot\left[2 - cos\left(\alpha\right)\right] + 2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot sin^2\left(\alpha\right)\cdot\omega_3^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left[J_1\cdot\dot{q}_{e1}^2 + \left(J_2 + J_3\right)\cdot\dot{q}_{e2}^2 - k\cdot\left(q_{e1} - q_{e2}\right)^2\right] - 2\cdot m\cdot g\cdot l\cdot\left[2 - cos\left(q_{e3}\right)\right] +$$
$$2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot\dot{q}_{e3}^2 + \frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot sin^2\left(q_{e3}\right)\cdot\left(\frac{1}{p}\cdot\dot{q}_{e2}\right)^2\right]$$

Es gilt:

$$\omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega$$
$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$
$$\Delta\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2$$
$$= \omega_1 - \omega_2$$
$$\varphi_1 = \varphi_2 + \Delta\varphi.$$

Generalisierte Koordinaten:

$\varphi_1 = q_{e1} \qquad \varphi_2 = q_{e2} \qquad \alpha = q_{e3}$

$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 = \dot{q}_{e1} \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2 = \dot{q}_{e2} \quad \dot{\alpha} = \dot{q}_{e3}$

Ableitung für q_{e1}:

$$\frac{\partial L_{mech}}{\partial \dot{q}_{e1}} = J_1 \cdot \dot{q}_{e1} = J_1 \cdot \dot{\varphi}_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{mech}}{\partial \dot{q}_{e1}} = J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1$$

$$\frac{\partial L_{mech}}{\partial q_{e1}} = -k \cdot \left(q_{e1} - q_{e2}\right) = -k \cdot \left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$

Daraus ergibt sich:

$$J_1\ddot{\varphi}_1 + k\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) = M_A - d_1\dot{\varphi}_1 = k_T i - d_1\dot{\varphi}_1$$

Ableitungsregel:

Mit $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$ folgt:

$$sin^2\,\alpha = \frac{1}{2}(1 - cos(2\alpha))$$

$$\begin{aligned}(sin^2\,\alpha)' &= 0 + \frac{1}{2} sin(2\alpha) \cdot 2 \\ &= sin(2\alpha) \\ &= 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha.\end{aligned}$$

Ableitung für q_{e2}:

$$\frac{\partial L_{mech}}{\partial \dot{q}_{e2}} = \left(J_2 + J_3\right) \cdot \dot{q}_{e2} + 2 \cdot m \cdot \frac{l^2}{p^2} \cdot \sin^2\left(q_{e3}\right) \cdot \dot{q}_{e2} = \left(J_2 + J_3\right) \cdot \omega_2 + 2 \cdot m \cdot \left(\frac{l}{p}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\alpha\right) \cdot \omega_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{mech}}{\partial \dot{q}_{e2}} = \left(J_2 + J_3\right) \cdot \dot{\omega}_2 + 2 \cdot m \cdot \left(\frac{l}{p}\right)^2 \cdot \left[2 \cdot \sin\left(\alpha\right) \cdot \cos\left(\alpha\right) \cdot \dot{\alpha} \cdot \omega_2 + \sin^2\left(\alpha\right) \cdot \dot{\omega}_2\right]$$

$$\frac{\partial L_{mech}}{\partial q_{e2}} = k \cdot \left(q_{e1} - q_{e2}\right) = k \cdot \left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$

Für $\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{mech}}{\partial \dot{q}_{e2}} - \frac{\partial L_{mech}}{\partial q_{e2}} = -Md_2$ folgt

$$\left(J_2 + J_3\right)\cdot\dot{\omega}_2 + 2\cdot m\cdot\left(\frac{l}{p}\right)^2\cdot\left[2\cdot\sin\left(\alpha\right)\cdot\cos\left(\alpha\right)\cdot\dot{\alpha}\cdot\omega_2 + \sin^2\left(\alpha\right)\cdot\dot{\omega}_2\right] - k\cdot\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = -d_{R2}\cdot\varphi_2$$

Ableitungen für q_{e3} ermitteln:

$$\frac{\partial L_{mech}}{\partial \dot{q}_{e3}} = 2ml^2\dot{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{mech}}{\partial \dot{q}_{e3}} = 2ml^2\ddot{\alpha}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{e3}} = -2mgl\,\sin\alpha + 2ml^2\,\sin\left(2\alpha\right)\frac{1}{p^2}\omega_2{}^2.$$

Für $\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{mech}}{\partial \dot{q}_{e3}} - \frac{\partial L_{mech}}{\partial q_{e3}} = 0$ ergibt sich:

$$2ml^2\ddot{\alpha} + 2mgl\,\sin\alpha - 2ml^2\,\sin\left(2\alpha\right)\frac{1}{p^2}\omega_2{}^2 = 0.$$

d)

Lagrange Funktion aufstellen: $L = L_{elekt} + L_{mech}$

$$\begin{aligned} L &= L_{elekt} + L_{mech} \\ &= \frac{1}{2}L_{Sp}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\cdot\left[J_1\cdot\dot{q}_{e1}^2 + \left(J_2 + J_3\right)\cdot\dot{q}_{e2}^2 - k\cdot\left(q_{e1} - q_{e2}\right)^2\right] - 2\cdot m\cdot g\cdot l\cdot\left[2 - cos\left(q_{e3}\right)\right] + \\ &\quad 2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot\dot{q}_{e3}^2 + \frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot sin^2\left(q_{e3}\right)\cdot\left(\frac{1}{p}\cdot\dot{q}_{e2}\right)^2\right] \end{aligned}$$